Propriétés métriques des courbes

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

7 février 2005

Dans tous ce chapitre, E désigne un espace affine euclidien orienté et $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Le choix d'un repère orthonormal de E permet d'exhiber une bijection de E sur un espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1 Longueur d'un arc paramétré

Une application continue

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \to & E \\ & t & \mapsto & f(t) = M(t) \end{array}$$

définit un **arc paramétré continu** que nous noterons $\gamma = (I, f)$. On rappelle qu'une **subdivision** de l'intervalle $I = [a, b]$ est une suite finie $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que

$$t_0 = a < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b.$$

Définition 1 *Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré continu. Si $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de $I = [a, b]$, on appelle* ***longueur de la ligne polygonale*** *$(M(t_i))_{0 \leq i \leq n}$ le réel positif*

$$l_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} M(t_{i-1}) M(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| .$$

La ***longueur de l'arc*** *γ est $l(\gamma) = \operatorname{Sup} \{ l_\sigma(\gamma) \ / \ \sigma$ subdivision de $I \} \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que l'arc γ est* ***rectifiable*** *si $l(\gamma) \in \mathbb{R}$.*

[0] [carc0001] v1.01 http://perso.wanadoo.fr/megamaths
© 2005, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

Il ne faut pas confondre la longueur de l'arc γ et la longueur du support $\gamma(I)$ de cet arc.
Ainsi, le segment $[a,b]$ peut être paramétré soit par $\gamma_1(t) = (1-t)a + tb$ avec $t \in [0,1]$, soit par $\gamma_1(t) = \left(1-t^2\right)a + t^2 b$ avec $t \in [-1,1]$, et l'on a $l(\gamma_2) = 2d(a,b) = 2l(\gamma_1)$. On montre facilement le

Théorème 1 *Soit $\gamma = (I, f)$ un arc continu, avec $I = [a,b]$.*
1) Si γ' est un sous-arc de γ, alors $l(\gamma') \leq l(\gamma)$.
2) Si $c \in [a,b]$, $\gamma_1 = \left([a,c], f|_{[a,c]}\right)$ et $\gamma_2 = \left([c,b], f|_{[c,b]}\right)$, alors $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. En particulier γ est rectifiable si et seulement si γ_1 et γ_2 le sont.

Définition 2 *Soient $\sigma = (t_i)_{0\leq i\leq n}$ et $\sigma' = (t'_i)_{0\leq i\leq n}$ deux subdivisions de $I = [a,b]$. On dit que la subdivision σ' est **plus fine** que la subdivision σ, et l'on note $\sigma' \prec \sigma$, si tout point t_i de σ est aussi un point t'_i de σ'.*

On vérifie facilement que $\prec$ est une relation d'ordre dans l'ensemble des subdivisions de I. Si σ et σ' sont deux subdivisions de I, on notera $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision de I obtenue en prenant tous les points t_i et t'_i des deux subdivisions σ et σ'. Plus généralement, si σ est une subdivision de I et si $\{c_1, ..., c_k\} \subset I$, on notera $\sigma \cup \{c_1, ..., c_k\}$ la subdivision de I formée des points t_i de σ et des points c_1,..., c_k.

Définition 3 *Le **pas** de la subdivision $\sigma = (t_i)_{0\leq i\leq n}$ de I est*

$$p(\sigma) = \underset{1\leq i\leq n}{\text{Max}} (t_i - t_{i-1}).$$

Lemme 1 *1) Si σ' est plus fine que σ, alors $l_\sigma(\gamma) \leq l_{\sigma'}(\gamma)$.*
2) Si $\sigma' = \sigma \cup \{c_1, ..., c_k\}$ et si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow l_{\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + 2k\varepsilon.$$

Preuve : 1) Il suffit de vérifier l'inégalité quand $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Soient $\sigma = (t_i)$ et i_0 tel que $t_{i_0-1} \leq c \leq t_{i_0}$. On a

$$l_{\sigma'}(\gamma) - l_\sigma(\gamma) = \|f(t_i) - f(c)\| + \|f(c) - f(t_{i-1})\| - \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \geq 0$$

d'où $l_\sigma(\gamma) \leq l_{\sigma'}(\gamma)$. L'inégalité précédente entraîne aussi

$$l_{\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + \|f(t_i) - f(c)\| + \|f(c) - f(t_{i-1})\|. \qquad (*)$$

2) La fonction f est continue sur le compact $[a,b]$, donc uniformément continue sur ce compact, et

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

L'inégalité $(*)$ montre alors que $l_{\sigma\cup\{c\}}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + 2\varepsilon$ dès que $p(\sigma) \leq \eta$. En réitérant k fois, on obtient bien $l_{\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + 2k\varepsilon$. ■

Théorème 2 *On a* $l(\gamma) = \lim_{p(\sigma)\to 0} l_\sigma(\gamma)$ *de sorte que la longueur d'un arc puisse être définie par cette formule.*

Preuve : Par définition $l(\gamma) = \operatorname{Sup} l_\sigma(\gamma)$.

• Si γ est rectifiable, c'est-à-dire si $l(\gamma) \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma' = (t'_i)_{0\leq i\leq k} \quad l(\gamma) - \varepsilon < l_{\sigma'}(\gamma) \leq l(\gamma).$$

Le Lemme précédent montre que pour tout $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow l_{\sigma\cup\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + 2(k-1)\varepsilon'.$$

En choisissant $\varepsilon' = \varepsilon/2(k-1)$ on peut donc affirmer l'existence de $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow l(\gamma) - \varepsilon < l_{\sigma'}(\gamma) \leq l_{\sigma\cup\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + \varepsilon$$

soit

$$p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow l(\gamma) - 2\varepsilon < l_\sigma(\gamma) \leq l(\gamma)$$

et le Théorème est démontré.

• Si $l(\gamma) = +\infty$, on adapte la solution ci-dessus. Maintenant

$$\forall A > 0 \quad \exists \sigma' = (t'_i)_{0\leq i\leq k} \quad A < l_{\sigma'}(\gamma)$$

et pour tout $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow l_{\sigma\cup\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + 2(k-1)\varepsilon'.$$

En prenant $\varepsilon' = A/4(k-1)$, on obtient

$$p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow A < l_{\sigma'}(\gamma) \leq l_{\sigma\cup\sigma'}(\gamma) \leq l_\sigma(\gamma) + \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} < l_\sigma(\gamma)$$

et cela prouve que $l(\gamma) = \lim_{p(\sigma)\to 0} l_\sigma(\gamma)$. ■

Remarque : Le lecteur aura sans doute remarqué que la définition de la limite $\lim_{p(\sigma)\to 0} l_\sigma(\gamma)$ est à priori bancale puisque $l_\sigma(\gamma)$ est une fonction de σ, et non de $p(\sigma)$, et puisque l'ensemble des subdivisions de I n'est pas structuré en espace topologique !

On peut néanmoins donner un sens à l'écriture $\lim_{p(\sigma)\to 0} l_\sigma(\gamma) = l(\gamma)$ en disant qu'il s'agit d'une limite suivant une base de filtre. Cela revient alors à écrire $\lim_{p(\sigma)\to 0} l_\sigma(\gamma) = l(\gamma)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad p(\sigma) \leq \eta \Rightarrow |l_\sigma(\gamma) - l(\gamma)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions σ de I. Dans notre cas, la base de filtre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ est formée des parties U_η de $\mathcal{S}$ définies par $U_\eta = \{\sigma \in \mathcal{S} \,/\, p(\sigma) \leq \eta\}$, et la fonction $\varphi : \sigma \mapsto l_\sigma(\gamma)$ admet le nombre $l(\gamma)$ pour limite suivant la base de filtre $\mathcal{B}$. Le lecteur intéressé pourra se référer au [1] §2.2.5.

Théorème 3 *Tout arc γ de classe C^1 est rectifiable, de longueur*

$$l(\gamma) = \int_a^b \left\| f'(t) \right\| dt.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ donné. On a

$$\left| l(\gamma) - \int_a^b \left\| f'(t) \right\| dt \right| \leq A + B + C$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \left| l(\gamma) - \sum_{i=1}^{n} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| \right|, \\ B &= \left| \sum_{i=1}^{n} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| - \sum_{i=1}^{n} \| f'(t_{i-1}) \| (t_i - t_{i-1}) \right|, \\ C &= \left| \sum_{i=1}^{n} \| f'(t_{i-1}) \| (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \| f'(t) \| dt \right|. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{p(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| = l(\gamma)$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $A \leq \varepsilon$ dès que $p(\sigma) \leq \eta_1$. Par ailleurs, la fonction $\|f'\|$ est continue donc intégrable sur I et son intégrale est limite des sommes de Riemann, soit

$$\lim_{p(\sigma)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left\| f'(t_{i-1}) \right\| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \left\| f'(t) \right\| dt.$$

Cela signifie qu'il existe $\eta_2 > 0$ tel que $C \leq \varepsilon$ dès que $p(\sigma) \leq \eta_2$. Il reste à majorer B. L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\begin{aligned} B &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \| f(t_i) - f(t_{i-1}) \| - \left\| f'(t_{i-1}) \right\| (t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\| f(t_i) - f(t_{i-1}) - f'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \right\|, \end{aligned}$$

d'où

$$B \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) - f'(t_{i-1})\, dt \right\|.$$

La fonction f' est continue sur $[a, b]$ par hypothèse, donc uniformément continu sur cet intervalle. Il existera $\eta_3 > 0$ tel que $\| f'(t) - f'(t_{i-1}) \| \leq \varepsilon$ dès que $p(\sigma) \leq \eta_3$, et l'on aura dans ce cas

$$B \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon (b - a).$$

Finalement,

$$p(\sigma) \leq \text{Min}\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\} \Rightarrow \left| l(\gamma) - \int_a^b \left\| f'(t) \right\| dt \right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon (b - a)$$

et le Théorème est démontré. ■

2 Abscisse curviligne

2.1 Définition et existence

Supposons que $\gamma = (I, f)$ soit un arc de classe C^1, avec $I = [a, b]$. La fonction

$$\begin{array}{cccl} s: & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| \, du \end{array}$$

est croissante, dérivable sur I de dérivée $s'(t) = \|f'(t)\|$. Si l'on suppose en outre l'arc γ régulier, c'est-à-dire sans point stationnaire (ce que l'on traduit par $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$), alors s' ne s'annule jamais et s est strictement croissante.
Le Théorème classique concernant la fonction réciproque d'une fonction continue (resp. dérivable) strictement monotone définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ montre que :

- $J = f(I)$ est un intervalle,
- Il existe une application réciproque $\sigma = s^{-1}$ de s de J dans I, de classe C^1 avec

$$\forall u \in I \quad \sigma'(u) = \frac{1}{s'(\sigma(u))}.$$

On s'intéresse alors au paramétrage $g = f \circ \sigma$ de γ rendant le diagramme ci-dessous commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Supp}(\gamma) & & \\ & {}^{f}\nearrow & & \nwarrow^{g} & \\ I & & \underset{s}{\longrightarrow} & & J \end{array}$$

où $\text{Supp}(\gamma) = f(I)$ désigne le support de γ. Intuitivement, ce paramétrage est construit de sorte que, à toute valeur $u \in J$, on fasse correspondre un point $M(u) = f \circ \sigma(u)$ situé à la "distance curviligne" u du point $M(u_0) = f(t_0)$. On a

$$\frac{dg}{ds} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = f'(t) \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

de sorte que le vecteur $g'(s)$ soit toujours un vecteur directeur unitaire de la tangente à γ au point $M(s)$.

Définition 4 *Soit $\gamma = (I, f)$ un arc rectifiable. Une* ***abscisse curviligne de*** *γ est une application $s : I \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall t, t' \in I \quad \left|s\left(t'\right) - s\left(t\right)\right| = l(\gamma^f_{t,t'})$$

où $\gamma^f_{t,t'}$ désigne l'arc obtenu par restriction de f à l'intervalle d'extrémités t et t'.

Théorème 4 *Si γ est de classe C^1, l'application*

$$s\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} \left\|f'\left(u\right)\right\| du$$

précédemment définie est une abscisse curviligne de γ.

Preuve : Si $t \leq t'$, $s\left(t'\right) - s\left(t\right) = \int_t^{t'} \left\|f'\left(u\right)\right\| du = l(\gamma^f_{t,t'})$. ■

Si l'arc $\gamma = (I, f)$ est seulement continu et rectifiable, l'application définie par $t \mapsto l(\gamma^f_{t_0,t})$ si $t_0 \leq t$ et $t \mapsto -l(\gamma^f_{t_0,t})$ si $t \leq t_0$, est une abscisse curviligne de γ. On peut montrer que cette application est croissante et continue (voir [1] V.2.1.1.3^0).

L'étude de la réciproque du Théorème 4 nous montre qu'il existe en fait "assez peu" d'abscisses curvilignes, ce que confirme notre intuition. Ainsi :

Théorème 5 *Soit $\gamma = (I, f)$ un arc régulier de classe C^1. Une application $s : I \to \mathbb{R}$ est une abscisse curviligne de γ si et seulement si il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que*

$$\forall t \in I \quad s'\left(t\right) = \varepsilon \left\|f'\left(t\right)\right\|,$$

ce qui revient à affirmer l'existence d'une constante c telle que

$$\forall t \in I \quad s\left(t\right) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left\|f'\left(u\right)\right\| du + c.$$

Preuve : ($\Leftarrow$) $s\left(t\right) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left\|f'\left(u\right)\right\| du + c$ entraîne

$$\left|s\left(t'\right) - s\left(t\right)\right| = \left|\int_{t}^{t'} \left\|f'\left(u\right)\right\| du\right| = l(\gamma^f_{t,t'}).$$

($\Rightarrow$) De

$$\forall t \in I \quad \left|s\left(t\right) - s\left(t_0\right)\right| = l(\gamma^f_{t_0,t}) = \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f'\left(u\right)\right\| du\right|$$

on déduit

$$\forall t \in I \quad s(t) - s(t_0) = \pm \int_{t_0}^{t} \left\| f'(u) \right\| du.$$

Notons $s_0(t) = \int_{t_0}^{t} \| f'(u) \| \, du$. L'application s_0 est une abscisse curviligne et

$$\forall t \in I \quad s(t) - s(t_0) = \pm s_0(t).$$

S'il existait $t' \neq t''$ tels que

$$\begin{cases} s(t') - s(t_0) = s_0(t') \\ s(t'') - s(t_0) = -s_0(t'') \end{cases}$$

on aurait $l(\gamma^f_{t',t''}) = |s_0(t') - s_0(t'')| = |s(t') - s(t'')|$, donc

$$\left| s_0(t') - s_0(t'') \right| = \left| s_0(t') + s_0(t'') \right|,$$

et nécessairement $s_0(t') = 0$ ou $s_0(t'') = 0$, autrement dit $t' = t_0$ ou $t'' = t_0$. On peut donc affirmer qu'il existe $\varepsilon = \pm 1$ tel que $s(t) - s(t_0) = \varepsilon s_0(t)$ pour tout $t \in I$, et dans ce cas $s'(t) = \varepsilon s_0'(t) = \varepsilon \| f'(t) \|$. ■

2.2 Paramétrage normal

Pour simplifier, appelons **courbe** γ le support $\operatorname{Supp} \gamma = f(I)$ de l'arc paramétré $\gamma = (I, f)$, et disons que (I, f) est **un paramétrage** de la courbe γ. Avec cette convention

Définition 5 *Un paramétrage (J, g) de la courbe γ continue et rectifiable est dit **normal** si $|t' - t| = l(\gamma^g_{t,t'})$ pour tous $t, t' \in J$. Cela revient à dire que Id_J est une abscisse curviligne de $\gamma = (J, g)$.*

Théorème 6 *Si $\gamma = (I, f)$ est un arc régulier de classe C^1, et si σ représente la fonction réciproque de l'abscisse curviligne $s(t) = \int_{t_0}^{t} \| f'(u) \| \, du$ définie au paragraphe précédent, alors $g = f \circ \sigma$ est un paramétrage normal de γ.*

Preuve : Comme $f = g \circ s$,

$$\begin{aligned} \left| s(t') - s(t) \right| &= \left| \int_t^{t'} \left\| f'(u) \right\| du \right| = \left| \int_t^{t'} \left\| g'(s(u)) \right\| s'(u) \, du \right| \\ &= \left| \int_{s(t)}^{s(t')} \left\| g'(v) \right\| dv \right| = l(\gamma^g_{s(t),s(t')}). \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 7 *Un arc $\gamma = (I, f)$ de classe C^1 admet un paramétrage normal si, et seulement si, il est régulier. De plus le paramétrage (J, g) de γ est normal si, et seulement si, $\|g'(s)\| = 1$ pour tout $s \in J$.*

Preuve : La seconde partie du Théorème provient des équivalences

$$\begin{array}{lll} (J,g) \text{ paramétrage normal} & \Leftrightarrow & Id_J \text{ est une abscisse curviligne de } \gamma = (J,g) \\ & \Leftrightarrow & \exists \varepsilon = \pm 1 \;\; \forall s \in I \quad (Id_J)'(s) = 1 = \varepsilon \left\| g'(s) \right\| \\ & \Leftrightarrow & \forall s \in J \quad \left\| g'(s) \right\| = 1. \end{array}$$

Pour vérifier la première partie du théorème, on remarque que si (I, f) est un paramétrage régulier de γ, le Théorème 6 exhibe un paramétrage normal de γ. Réciproquement, s'il existe un paramétrage normal (J, g) de γ, alors $\|g'(s)\| = 1 \neq 0$ pour tout s, et (J, g) est un paramétrage régulier. ■

Définition 6 *Si*

$$\begin{array}{rccc} g: & J & \to & E \\ & s & \mapsto & g(s) = s(t) \end{array}$$

est un paramétrage normal de γ, on fera l'abus d'appeler ***abscisse curviligne de*** *γ la variable s de g.*

3 Courbes dans l'espace

Dans cette section $\gamma = (I, f)$ désigne un arc paramétré de classe C^3 dans l'espace affine euclidien orienté E_3 de dimension 3. On rappelle qu'un point $M = f(t)$ de γ est dit **birégulier** si le système $(f'(t), f''(t))$ est libre. Un arc γ est dit **birégulier** si chacun de ses points est birégulier. Si M est un point birégulier de γ, on dispose en ce point M :

- ⋆ d'une **tangente** dirigée par $f'(t)$,
- ⋆ d'un **plan osculateur** : c'est le plan $M + \mathrm{Vect}(f'(t), f''(t))$,
- ⋆ d'un **plan rectifiant** : c'est le plan $M + \mathrm{Vect}(f'(t), f'(t) \wedge f''(t))$.

On admettra que ces définitions sont attachées à la courbe γ et ne dépendent pas du choix de la paramétrisation birégulière (voir [1]), et dans la suite, on supposera que l'arc γ est birégulier.

3.1 Repère de Frénet

Le Théorème 7 montre l'existence d'un paramétrage normal $g : J \to E_3$ de γ, par exemple $g = f \circ \sigma$ où σ est la fonction réciproque de $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, du$. Dans ce cas s représente l'abscisse curviligne associée à ce paramétrage, et

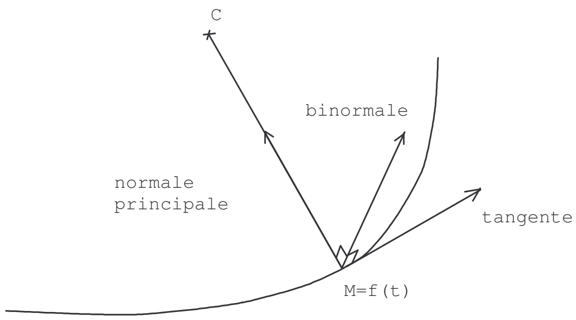
$$\forall s \in J \quad \left\| g'(s) \right\| = 1.$$

En dérivant le carré $\|g'(s)\|^2 = 1$, on obtient

$$\forall s \in J \quad g'(s) . g''(s) = 0.$$

On définit alors les vecteurs unitaires suivants : le vecteur $\tau(s) = g'(s)$ qui dirige la tangente à γ, puis le vecteur $\nu(s) = g''(s) / ||g''(s)||$ qui dirige la normale principale à γ en M, et enfin le vecteur $\beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$ qui dirige la binormale à γ en M. Avec ces notations $(M, \tau(s), \nu(s))$ et $(M, \tau(s), \beta(s))$ sont des repères orthonormaux respectifs du plan osculateur, et du plan rectifiant en M.

Définition 7 *Le repère orthonormal direct* $(M, \tau(s), \nu(s), \beta(s))$ *est appelé* ***repère de Frénet*** *en* M *de l'arc* γ*.*



3.2 Formules de Frénet

On a $\tau'(s) = g''(s) = \|g''(s)\| \nu(s)$. La **courbure** de γ au point $M(s)$ est, par définition, le réel positif $c = c(s) = \|g''(s)\|$. Comme $g'(s)$ est unitaire, la courbure $c(s)$ mesure "la vitesse de rotation" du point $M(s)$ et rend ainsi compte de la "courbure" de la trajectoire. On obtient la première formule de Frénet

$$\boxed{\frac{d\tau}{ds} = c\nu.}$$

On a

$$\begin{aligned} \beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s) \quad &\Rightarrow \quad \beta'(s) = \tau'(s) \wedge \nu(s) + \tau(s) \wedge \nu'(s) = \tau(s) \wedge \nu'(s) \\ &\Rightarrow \quad \beta'(s) . \tau(s) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\beta'(s)$ est orthogonal à $\tau(s)$ et à $\beta(s)$ (en effet, comme $\beta(s)$ est unitaire il suffit de dériver $\|\beta(s)\|^2 = 1$ pour obtenir $\beta'(s).\beta(s) = 0$). Il existe par conséquent une constante T, appelée **torsion** de γ au point M, telle que

$$\boxed{\frac{d\beta}{ds} = T\nu.}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\nu = \beta \wedge \tau \quad &\Rightarrow \quad \nu' = \beta' \wedge \tau + \beta \wedge \tau' \\
&\Rightarrow \quad \nu' = T\nu \wedge \tau + \beta \wedge c\nu \\
&\Rightarrow \quad \nu' = -T\beta - c\tau
\end{aligned}$$

nous donne la troisième formule de Frénet :

$$\boxed{\frac{d\nu}{ds} = -c\tau - T\beta.}$$

Si la courbure c de γ n'est pas nulle au point M, le **rayon de courbure** en M est, par définition, le nombre positif $R = 1/c$, et le **centre de courbure** en M est le point C défini par $\overrightarrow{MC} = R\nu$. L'inverse $1/T$ de la torsion est appelé **rayon de torsion**.

3.3 Calculs pratiques

Les calculs suivants montrent qu'il est possible d'obtenir le repère de Frénet, la courbure et la torsion en un point birégulier sans avoir à expliciter un paramétrage normal de la courbe. Soit $\gamma = (I, f)$ un arc de classe C^3 birégulier. Choisissons l'abscisse curviligne $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, du$ et notons $g = f \circ \sigma$ le paramétrage normal associé. On rappelle que $\sigma = s^{-1}$ et $f = g \circ s$. De $s'(t) = \|f'(t)\|$ et $f'(t) = g'(s)\; s'(t)$ on déduit

$$\tau = g'(s) = \frac{f'(t)}{||f'(t)||}, \quad (1)$$

puis $f''(t) = g''(s)\; (s'(t))^2 + g'(s).s''(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f'(t) \wedge f''(t) &= \left(g'(s)\; s'(t)\right) \wedge \left(g''(s)\; \left(s'(t)\right)^2\right) \\
&= \left(s'(t)\right)^3 g'(s) \wedge g''(s) \\
&= \left\|f'(t)\right\|^3 g'(s) \wedge g''(s)\,. \quad (*)
\end{aligned}$$

Comme $\|g'(s)\| = 1$, la courbure s'écrit $c = \|g''(s)\| = \|g'(s) \wedge g''(s)\|$, et l'on obtient

$$c = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}. \quad (2)$$

Par ailleurs, $(*)$ entraîne aussi

$$\beta = \tau \wedge \nu = g'(s) \wedge \frac{g''(s)}{\|g''(s)\|} \underset{(*)}{=} \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t)\|^3 \|g''(s)\|} \underset{(2)}{=} \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}$$

soit

$$\beta = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}. \quad (3)$$

Comme la base (τ, ν, β) est ortohnormale directe, on aura aussi

$$\nu = \beta \wedge \tau. \quad (4)$$

Il ne reste plus qu'à exprimer la torsion en fonction de f. On a

$$\begin{aligned} f'''(t) &= g'''(s)\,\left(s'(t)\right)^3 + g''(s)\;2s'(t)\,s''(t) + g''(s)\;s'(t)\,s''(t) \\ &\qquad + g'(s)\,s''(t)\,s'''(t) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left[f'(t), f''(t), f'''(t)\right] &= \left[g's', g''s'^2 + g's'', g'''s'^3\right] \\ &= \left[g's', g''s'^2, g'''s'^3\right] \\ &= s'^6\left[g', g'', g'''\right] \\ &= \|f'(t)\|^6\left[g', g'', g'''\right]. \quad (**) \end{aligned}$$

Evaluons le déterminant $[g', g'', g''']$.

$$g' = \tau \Rightarrow g'' = c\nu \Rightarrow g''' = c'\nu + c\nu' = c'\nu + c\,(-c\tau - T\beta) = -c^2\tau + c'\nu - cT\beta$$

entraîne

$$\begin{aligned} \left[g', g'', g'''\right] &= \left(g' \wedge g''\right).g''' \\ &= (\tau \wedge c\nu).\left(-c^2\tau + c'\nu - cT\beta\right) \\ &= (\tau \wedge c\nu).(-cT\beta) = -c^2 T. \quad (***) \end{aligned}$$

Les relations $(**)$, $(***)$ et (2) nous donnent alors

$$T = -\frac{1}{c^2}\left[g', g'', g'''\right] = -\frac{\|f'(t)\|^6}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2} \times \frac{[f'(t), f''(t), f'''(t)]}{\|f'(t)\|^6}$$

soit

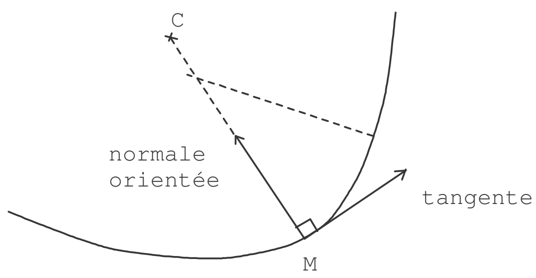
$$T = -\frac{[f'(t), f''(t), f'''(t)]}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}. \quad (5)$$

4 Courbes planes

4.1 Repère de Frénet

Ici $\gamma = (I, f)$ est un arc paramétré birégulier de classe C^2 du plan affine euclidien orienté E_2, et $g : J \to E_2$ est un paramétrage normal de γ. Le vecteur $\tau(s) = g'(s)$ est unitaire et dirige la tangente à γ en $M(s)$. Par définition, le vecteur unitaire de la normale orientée est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\tau(s)$. On peut écrire $\nu(s) = k \wedge \tau(s)$ où k est le vecteur unitaire directement orthogonal au plan E_2 considéré comme plongé dans l'espace E_3. On a

$$\frac{d\tau}{ds} = g''(s) \quad \text{et} \quad \frac{d\nu}{ds} = k \wedge g''(s).$$



Comme $\|g'(s)\| = 1$ pour tout s, le vecteur $g''(s)$ est colinéaire à ν et l'on peut poser

Définition 8 *Le réel $c(s)$ tel que $g''(s) = c(s)\nu(s)$ s'appelle la* ***courbure algébrique*** *de γ en $M(s)$. Si $c(s) \neq 0$, on définit le* ***rayon de courbure algébrique*** *$R(s) = 1/c(s)$ de γ en $M(s)$. Enfin, la* ***courbure*** *(resp. le* ***rayon de courbure****) de γ en $M(s)$ est la valeur absolue de la courbure algébrique (resp. du rayon de courbure algébrique) de γ en $M(s)$.*

Dans le cas des courbes planes on s'intéresse essentiellement à la courbure algébrique. Comme $g''(s) = c(s)\nu(s)$, on trouve

$$\frac{d\nu}{ds} = k \wedge g''(s) = c.k \wedge \nu = -c\tau$$

et l'on a prouvé le

Théorème 8 ***(Formules de Frénet)***
On a les mêmes formules que dans le cas de la dimension 3 mais avec une

torsion T nulle, à savoir :

$$\frac{d\tau}{ds} = c\nu \quad et \quad \frac{d\nu}{ds} = -c\tau.$$

4.2 Calculs pratiques

Exprimons les vecteurs τ et ν ainsi que la courbure algébrique c en fonction de f, f' et f''. On a $f = g \circ s$, donc $f'(t) = g'(s)\ s'(t)$, et cela permet d'écrire

$$\tau(s) = g'(s) = \frac{f'(t)}{s'(t)} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}. \quad (1)$$

et

$$\nu = k \wedge \tau. \quad (2)$$

En effet $s'(t) = \|f'(t)\|$ si l'on choisit l'abscisse curviligne

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|f'(u)\right\| du,$$

ce qui est toujours possible. Comme $f''(t) = g''(s).(s'(t))^2 + g'(s).s''(t)$, on trouve

$$\left[f', f''\right] = \left[g's', g''.s'^2\right] = \left\|f'(t)\right\|^3 \left[g', g''\right] = \left\|f'(t)\right\|^3 [\tau, c\nu] = c\left\|f'(t)\right\|^3$$

donc

$$c = \frac{[f', f'']}{\|f'(t)\|^3}. \quad (3)$$

4.3 Utilisation de l'angle polaire $\theta(t) = (\overrightarrow{i}, f'(t))$

Posons $f(t) = (x(t), y(t))$ et supposons toujours f de classe C^2. On a

$$f'(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} = \left\|f'(t)\right\| (\cos\theta(t)\overrightarrow{i} + \sin\theta(t)\overrightarrow{j})$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = s'(t)\cos\theta(t) \\ y'(t) = s'(t)\sin\theta(t). \end{array}\right. \quad (1)$$

On admet que la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est de classe C^2 (cf. Théorème de relèvement, [1] V.1.4.1.2), de sorte que l'on puisse dériver ces relations par rapport à t. On obtient

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = s''\cos\theta - s'\theta'\sin\theta \\ y'' = s''\sin\theta + s'\theta'\cos\theta. \end{array}\right.$$

En éliminant s'', on trouve

$$y''\cos\theta - x''\sin\theta = s'\theta'$$

d'où

$$\theta' = \frac{1}{s'}\left(y''\frac{x'}{s'} - x''\frac{y'}{s'}\right) = \frac{x'y'' - x''y'}{s'^2}. \qquad (2)$$

Notons $\sigma : J \to I$ la fonction réciproque de l'abscisse curviligne $s : I \to J$. On a $\theta(t) = \theta \circ \sigma(s)$ et

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}.\frac{dt}{ds} = \frac{\theta'}{s'} = \frac{x'y'' - x''y'}{s'^3} = \frac{[f', f'']}{\|f'(t)\|^3} = c.$$

La dérivée $d\theta/ds$ est donc égale à la courbure algébrique de γ en $M(s)$. Si l'on paramétrise la courbe γ grâce à θ, on obtient

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{df}{ds}.\frac{ds}{d\theta} = g'(s).\frac{1}{c} = R\tau(s)$$

et la formule $f'(\theta) = R(\theta)\tau(\theta)$, où $\tau(\theta)$ désigne le vecteur unitaire de la tangente orientée à γ au point $f(\theta)$ et où $R(\theta)$ désigne le rayon de courbure de γ en ce point. C'est cette formule qui est rappelée dans le préambule de la deuxième composition de l'agrégation interne 1995.

4.4 Centre de courbure

Définition 9 *Le **centre de courbure** de γ en $M(s)$ est le point C situé sur la normale à γ en $M(s)$ à une distance égale au rayon de courbure $|R|$ et du même côté que la courbe par rapport à sa tangente (i.e. du même côté que $f''(t)$).*

Théorème 9 *Le centre de courbure C est défini par $\overrightarrow{MC} = R\nu$ où R est le rayon de courbure algébrique en $M(s)$.*

Preuve : On a $\overrightarrow{MC} = \varepsilon|R|\nu$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\overrightarrow{MC}.f''(t) \geq 0$. Cette dernière condition équivaut à

$$\begin{aligned} \varepsilon|R|\nu.f''(t) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \varepsilon|R|\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \varepsilon|R|\left(x'y'' - y'x''\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Comme

$$R = \frac{1}{c} = \frac{\|f'(t)\|^3}{[f', f'']}$$

on aura $\varepsilon|R| \times R \geq 0$, soit $\varepsilon|R| = R$. ■

Cherchons maintenant les coordonnées (X, Y) du centre de courbure C. On a

$$\begin{cases} \tau = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}) \\ \nu = k \wedge \tau = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}(-y'\overrightarrow{i} + x'\overrightarrow{j}) \end{cases}$$

et $\overrightarrow{MC} = R\nu$, et après calcul,

$$\begin{cases} X = x - \frac{y'.\left(x'^2+y'^2\right)}{x'y''-y'x''} \\ Y = y + \frac{x'.\left(x'^2+y'^2\right)}{x'y''-y'x''}. \end{cases}$$

Théorème 10 *Soient γ un arc birégulier admettant une courbure non nulle au voisinage d'un de ses points M_0. Le centre de courbure de γ en M_0 de paramètre s_0 est la limite du point U d'intersection de la normale à γ en M_0 et de la normale à γ en $M(s)$ lorsque s tend vers s_0.*

Preuve : Notons g une paramétrisation normale de γ, et

$$M(s) = g(s) = (\varphi(s), \psi(s))$$

le point de paramètre s de γ. Le centre de courbure C en $M_0 = M(s_0)$ est le point C défini par $\overrightarrow{M_0C} = (1/c(s_0))\overrightarrow{\nu}$. Au point de paramètre s, le vecteur tangent $\overrightarrow{\tau} = \left(\varphi'(s), \psi'(s)\right)$ est de norme 1 et $\overrightarrow{\nu} = \left(-\psi'(s), \varphi'(s)\right)$. On a

$$\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = c(s)\overrightarrow{\nu} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \varphi''(s) \\ \psi''(s) \end{pmatrix} = c(s)\begin{pmatrix} -\psi'(s) \\ \varphi'(s) \end{pmatrix} \quad (*)$$

donc

$$C = \begin{pmatrix} \varphi(s_0) \\ \psi(s_0) \end{pmatrix} + \frac{1}{c(s_0)}\begin{pmatrix} -\psi'(s_0) \\ \varphi'(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(s_0) - \frac{\psi'(s_0)}{c(s_0)} \\ \psi(s_0) + \frac{\varphi'(s_0)}{c(s_0)} \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point U sont les solutions du système

$$\begin{cases} \varphi'(s_0)(x - \varphi(s_0)) + \psi'(s_0)(y - \psi(s_0)) = 0 \\ \varphi'(s)(x - \varphi(s)) + \psi'(s)(y - \psi(s)) = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \varphi'(s_0)x + \psi'(s_0)y = \varphi'(s_0)\varphi(s_0) + \psi'(s_0)\psi(s_0) \\ \varphi'(s)x + \psi'(s)y = \varphi'(s)\varphi(s) + \psi'(s)\psi(s). \end{cases}$$

Il suffit de vérifier que les coordonnées de U tendent vers celles de C pour conclure. Faisons la vérification pour l'abscisse seulement. L'abscisse de U est

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\psi'(s)\left[\varphi'(s_0)\varphi(s_0)+\psi'(s_0)\psi(s_0)\right]-\psi'(s_0)\left[\varphi'(s)\varphi(s)+\psi'(s)\psi(s)\right]}{\varphi'(s_0)\psi'(s)-\varphi'(s)\psi'(s_0)} \\
&= \varphi(s_0)-\frac{\psi'(s_0)}{A}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi'(s)\psi'(s_0)-\varphi'(s_0)\psi'(s)}{\varphi(s_0)\varphi'(s)+\psi'(s)\psi(s_0)-\varphi(s)\varphi'(s)-\psi(s)\psi'(s)} \\
&= \frac{\varphi'(s_0)\frac{\psi'(s)-\psi'(s_0)}{s-s_0}-\psi'(s_0)\frac{\varphi'(s)-\varphi'(s_0)}{s-s_0}}{\varphi'(s)\frac{\varphi(s)-\varphi(s_0)}{s-s_0}+\psi'(s)\frac{\psi(s)-\psi(s_0)}{s-s_0}}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite et compte tenu de $||\overrightarrow{\tau}||=1$ et de $(*)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to s_0} A &= \frac{\varphi'(s_0)\psi''(s_0)-\psi'(s_0)\varphi''(s_0)}{\varphi'(s_0)^2+\psi'(s_0)^2}=\varphi'(s_0)\psi''(s_0)-\psi'(s_0)\varphi''(s_0) \\
&= \varphi'\left(c\varphi'\right)-\psi'\left(-c\psi'\right)=c. \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque : Considérons la paramétrisation

$$f(t)=(x(t),y(t))=(r\cos t, r\sin t)$$

du cercle γ de centre O et de rayon r. L'angle polaire vaut

$$\theta(t)=(\overrightarrow{i}, f'(t))=t+\frac{\pi}{2}$$

et la courbure du cercle sera

$$c=\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{dt}.\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{\|f'(t)\|}=\frac{1}{r}.$$

La courbure d'un cercle est donc égale à l'inverse de son rayon, et le rayon de courbure d'un cercle est constant et égal à son rayon. C'est plutôt rassurant. La courbure d'un cercle est d'autant plus grande que son rayon est petit et cela correspond bien à l'intuition que l'on peut avoir de la courbure d'un arc paramétré, et justifie d'avoir posé $c=1/r$.
On vérifiera par ailleurs que le centre de coubure du cercle coïncide avec son centre. Enfin si l'on paramètre γ dans l'autre sens en posant

$$f(t)=(r\cos(-t), r\sin(-t)),$$

on trouve $c=-1/r$ comme courbure algébrique, mais toujours $1/r$ comme courbure géométrique, et toujours le même centre de coubure.

4.5 Développée

Si la courbure $c(t)$ ne s'annule jamais, le centre de courbure $C(t)$ est toujours défini. L'arc paramétré $\Gamma = (I, h)$ avec

$$h: \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & E_2 \\ t & \mapsto & C(t) \end{array}$$

est constitué de tous les centres de courbure de γ. C'est par définition **la développée** de γ. On a vu que

$$\Gamma : \begin{cases} X = x - y'u \\ Y = y + x'u \end{cases} \quad \text{où } u = \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}.$$

Comme

$$h'(t) = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - y''u - y'u' \\ y' + x''u + x'u' \end{pmatrix}$$

on obtient

$$h'(t) \wedge \nu(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

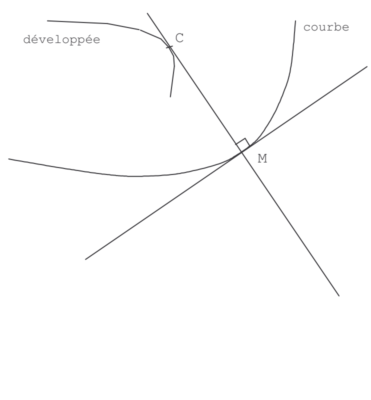
puisque

$$\begin{aligned} X'x' + Y'y' &= \left(x' - y''u - y'u'\right) x' + \left(y' + x''u + x'u'\right) y' \\ &= x'^2 + y'^2 + u\left(y'x'' - x'y''\right) = 0. \end{aligned}$$

En conclusion :

Théorème 11 *La tangente en C à la développée Γ de γ coïncide avec la normale en M à γ.*

Définition 10 *Si Γ est la développée de γ, on dit que γ est la* ***développante*** *de Γ.*



References

[1] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de Mathématiques Spéciales, Volume **3**, Topologie et Eléments d'Analyse, Masson, 1989.

[2] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de Mathématiques Spéciales, Volume **5**, Applications de l'Analyse à la Géométrie, Masson, 1989.